

ЭНТРОПИЯ 4- ... 9-АТОМНЫХ ПОЛИЭДРИЧЕСКИХ КЛАСТЕРОВ: СВЯЗЬ С ТОЧЕЧНЫМИ ГРУППАМИ СИММЕТРИИ

Войтеховский Ю.Л.

Геологический институт КНЦ РАН, г. Анапаны, woyt@geoksc.apatity.ru

Энтропия как функция состояния системы и свёртка вероятностного распределения широко применяется в естественных науках, в том числе в кристаллографии и минералогии. Далее топологическая энтропия рассматривается как характеристика выпуклых n -акров, моделирующих n -атомные полиэдрические кластеры.

Общая теория выпуклых полиэдров изложена в [Grünbaum, 1967]. В серии статей автор рассмотрел специальную проблему о комбинаторном разнообразии выпуклых n -эдров, быстро растущим с n . В [Войтеховский, Степенчиков, 2008; Voytekhsy, 2014] перечислены и охарактеризованы порядками групп автоморфизмов (п.г.а.) и точечными группами симметрии (т.г.с.) все комбинаторные типы выпуклых 4- ... 12-эдров и простых (в каждой вершине сходятся ровно 3 грани / ребра) 13- ... 16-эдров. Асимптотически ($n \rightarrow \infty$) почти все n -эдры (и n -акры, т.е. n -вершинные полиэдры, в силу дуальности) оказываются комбинаторно асимметричными (примитивными триклинными). В [Voytekhsy, 2016] предложен метод именования любого выпуклого n -акра числовым кодом, получаемым из матрицы смежности его рёберного графа.

В [Voytekhsy, 2017 a, b] найдены комбинаторные типы выпуклых n -акров с \min_n и \max_n именами и их асимптотические соотношения.

Выпуклые n -акры легко интерпретировать как кластеры с атомами в вершинах и валентными связями вдоль рёбер. Коррелируется ли топологическая энтропия с п.г.а. атомного кластера? Если так, то она может быть принята как непрерывная аппроксимация дискретных т.г.с. Но выпуклые n -акры различны по числу рёбер в целом и валентностям вершин, в частности. Из теории следует, что сложность системы зависит более от специфики межэлементных отношений (e.g., валентностей вершин), чем от числа элементов (e.g., числа позиций вершин, эквивалентных по данной т.г.с.). Эффективно ли топологическая энтропия характеризует сложность выпуклых n -атомных кластеров? Эти вопросы обсуждаются в статье.

Статистическая энтропия H и её свойства

Концепция энтропии предложена в термодинамике Р. Клаузиусом (1865). Её статистическая интерпретация дана Л. Больцманом (1872). К. Шеннон [Shannon, 1948] и Е. Альфен [Halphen, 1957] независимо получили формулу

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

в рамках математической теории передачи информации и популяционной статистики, соответственно. В обоих случаях энтропия рассматривается как свёртка некоторого распределения вероятностей p_i с очевидным ограничением $p_1 + \dots + p_n = 1$. Она ограничена $H_{\min} = 0$, когда одна из вероятностей $p_i = 1$ (остальные 0), и $H_{\max} = \log n$, когда все $p_i = 1/n$. Её график для двух (дуги с $H_{\max} = \lg 2$) и трёх (поверхность с $H_{\max} = \lg 3$) вероятностей показан на рис. 1 над барицентрической диаграммой $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Легко видеть, что равные изменения вероятностей p_i в углах и центральной части диаграммы приводят к весьма различным изменениям H .

Топологическая энтропия H_s выпуклых n -акров

Приведенная формула позволяет характеризовать топологию выпуклых n -акров в разных аспектах. Определим энтропию H_s с точки зрения симметрий-

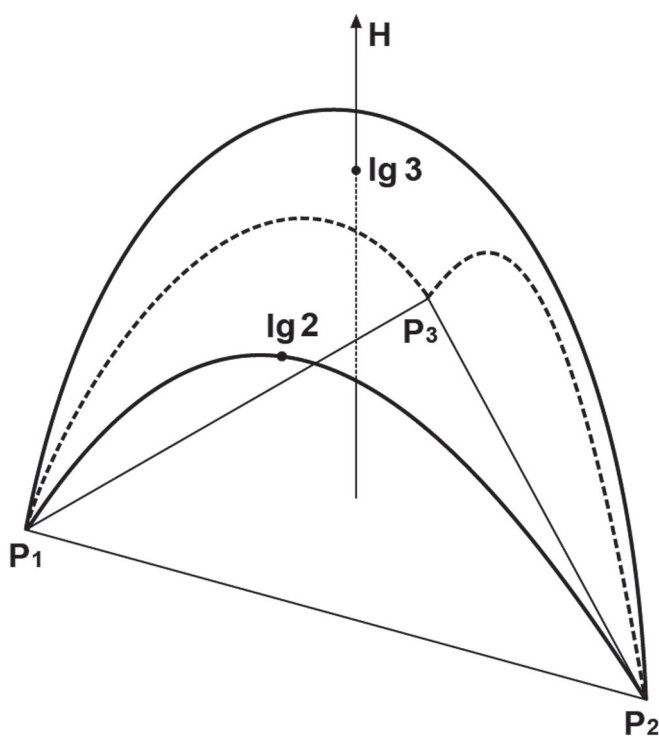


Рис. 1. График функции $H(p_1, p_2, p_3)$. Здесь и далее в найтах, т.к. использованы десятичные логарифмы

Таблица 1. Симметрия выпуклых 4- ... 9-аэров, V – число вершин, F – граней

п.г.а.	т.г.с.	V	4	5	6				7					8								9									
		F	4	5	6	5	6	7	8	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10	11	12	7	8	9	10	11	12	13	14		
1	1									2	3	2			3	22	48	44	21	2	2	48	237	533	662	449	164	16			
2	2					1				1	2		1		2	5	5	8	1	1		5	8	22	10	25	3	7			
	m						1		1	2	4	4			4	11	17	19	12	4	4	17	48	71	87	74	46	18			
3	3																								1						
4	mm2						1	1	1		2	2	1	1	2		1	2	4	3	2	1		7	5	10	4	5			
	2/m																1			3											
6	3m									2			2				2					2			2			1			
8	4mm		1														1						2				2				
	mmm															1															
	$\bar{4}2m$															2		1		1											
10	5m					1																									
12	$\bar{6}m2$			1	1												1					1			1			2			
	$\bar{3}m$																			1											
	6mm									1																					
14	7m															1															
16	$\bar{8}2m$																	1													
	8mm																						1								
20	$\bar{10}m2$												1																		
24	6/mmm																			1											
	$\bar{4}3m$	1																			1										
28	$\bar{14}m2$																											1			
48	$m\bar{3}m$							1						1																	
Σ			1	1	1	1	2	2	2	2	8	11	8	5	2	11	42	74	76	38	14	8	74	296	633	768	558	219	50		
			1	2			7				34						257								2606						

ных позиций вершин. В этом случае p_i означают числа вершин n-акра в различных позициях, а $p_i = n_i / n = n_i / \Sigma n_i$ – соответствующие вероятности. Для данного n, $H_{s,max}$ достигается у n-аэров с неэквивалентными вершинами, например, у комбинаторно асимметричных (т.е. не приводимых к симметричному виду никакими непрерывными деформациями), $n \geq 7$. $H_{s,min}$ достигается у вершинно-транзитивных n-аэров: правильных (платоновых) и полуправильных (архимедовых), а также у бесконечных серий призм и антипризм. Но как H_s зависит от п.г.а. и т.г.с. n-аэров с ростом n? Рёберные графы всех 2907 выпуклых 4- ... 9-аэров и их характеристики (табл. 1) взяты из [Voytekhsy, Stepenshchikov, 2008].

Лексикографически упорядоченные последовательности чисел вершин в различных симметричных позициях для выпуклых 4- ... 9-аэров и их т.г.с. перечислены далее. **4-акр.** 4: $\bar{4}3m$ (тетраэдр). **5-акры.** 14: $4mm$ (4-гональная пирамида), 23: $\bar{6}m2$ (3-гональная бипирамида). **6-акры.** 1122: m , 15: $5m$ (5-гональная пирамида), 222: 2, $mm2$, 6: $\bar{6}m2$ (3-гональная призма),

$m\bar{3}m$ (октаэдр). **7-акры.** 1111111: 1, 11122: m , 1222: 2, m , $mm2$, 124: $mm2$, 133: $3m$, 16: $6mm$, 25: $\bar{10}m2$. **8-акры.** 11111111: 1, 111122: m , 11222: 2, m , 1124: $mm2$, 1133: $3m$, 2222: 2, $mm2$, 17: $7m$, 224: $mm2$, 2/m, 26: $\bar{3}m$, $\bar{6}m2$, $6/mmm$, 44: mmm , $\bar{4}2m$, $\bar{4}3m$, 8: $\bar{8}2m$, $m\bar{3}m$. **9-акра.** 111111111: 1, 1111122: m , 111222: m , 12222: 2, m , $mm2$, 1224: $mm2$, 144: $mm2$, $4mm$, 18: $8mm$, 27: $\bar{14}m2$, 333: 3, $3m$, 36: $3m$, $\bar{6}m2$. Данные использованы для расчёта энтропии H_s (рис. 2).

Энтропия H_s обнаруживает тренд: чем больше п.г.а., тем меньше H_s . Но есть ряд исключений. Оба 5-акра противоречат тренду. Некоторые n-акры с тем же п.г.а. (и даже т.г.с.) различны по H_s , хотя некоторые n-акры с той же H_s различны по т.г.с. (и даже п.г.а.). Более того, некоторые n-акры с большими п.г.а. имеют и большую H_s . Для данного n, уравнение $H_s = const$ разрешимо над p_1, \dots, p_n только если $const = 0$ или $\lg n$. Для $0 < const < \lg n$ оно не разрешимо (на изолинии $H = const$ лежит бесконечно много точек, рис. 1). В дискретном случае для данного n число вероятностных распределений $p_i = n_i / n$ и соот-

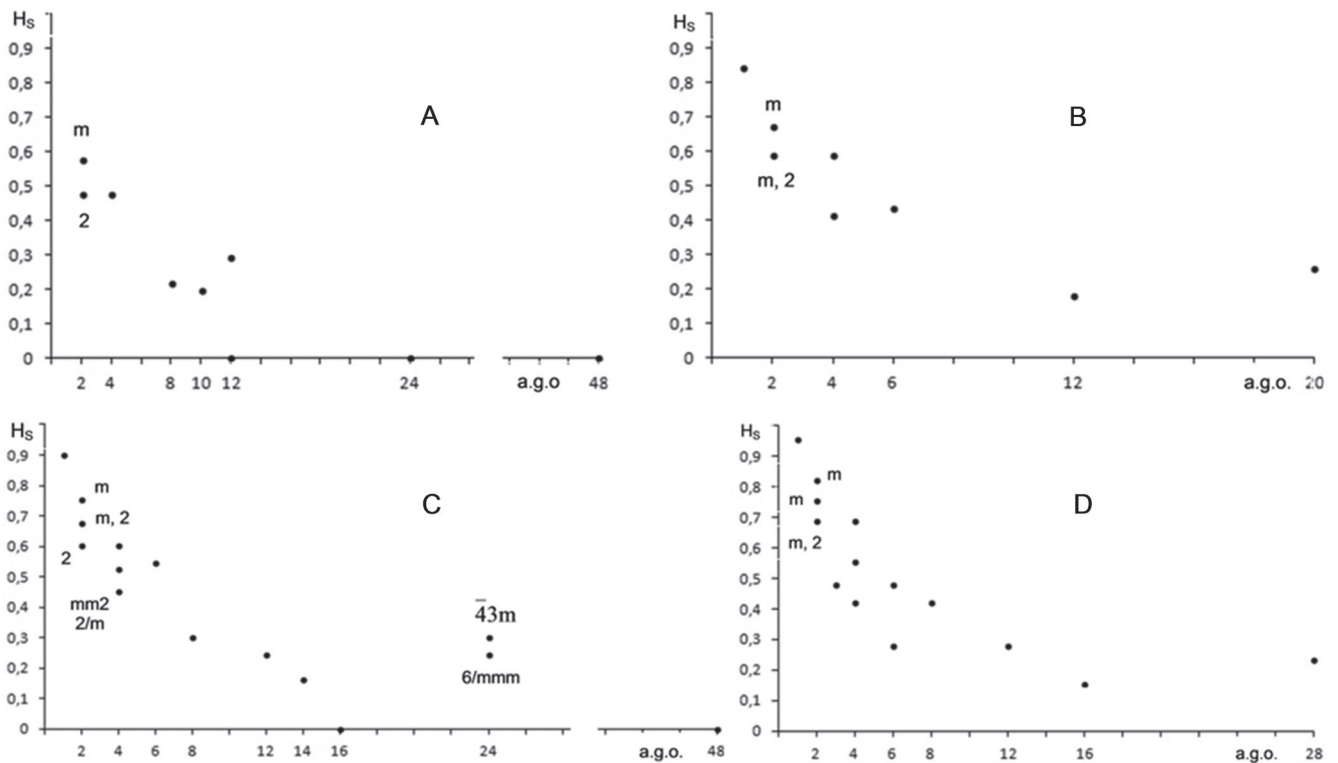


Рис. 2. Энтропия H_s выпуклых 4- ... 6-акров (А, всего 10), 7-акров (В, 34), 8-акров (С, 257) и 9-акров (D, 2606) в зависимости от их порядков групп автоморфизмов (a.g.o.). Точечные группы симметрии указаны там, где они не следуют из Табл. 1

ветствующих значений H_s конечно, они могут быть рассчитаны заранее. В этом случае по H_s вероятности могут быть восстановлены. Но это невозможно, если p не дано. Так, вероятности (3/6, 3/6) для 6-акра и (4/8, 4/8) для 8-акра дают ту же H_s . Для данного p , равные H_s возможны для n -акров с разными т.г.с. и даже п.г.а. в зависимости от того, лежат ли вершины на плоскостях и / или осях симметрии.

Топологическая энтропия H_v выпуклых n -акров

Энтропия H_s фиксирует более беспорядок, чем сложность топологии n -акра. Первый неплохо характеризуется через т.г.с. С этой точки зрения, комбинаторно асимметричные n -акры наиболее неупорядочены, тогда как n -акры с $H_s = 0$ наиболее упорядочены. Но есть n -акры с той же т.г.с. и разными валентностями вершин. Мы полагаем, что у них различная сложность, не фиксируемая H_s . Для этого предлагается энтропия H_v , учитывающая именно различные валентности вершин n -акра: $p_i = v_i / p$. Так, есть 7 комбинаторно асимметричных 7-акров (табл. 1) с равной энтропией $H_s = H_{\max} = \lg 7$. Но почти все они уникальны по валентностям вершин [Voytekhevsky, 2016, Fig. 3]: 232, 3211, 331 (два 7-акра), 412, 43 и 511. Здесь и далее в символах упорядочены числа вершин от v_3 до v_{\max} . Ясно, что H_v различна для 6 классов. Аналогично, 140 комбинаторно асимметричных 8-акров (табл. 1) делятся по символам на 31 класс. Но, т.к. нули и

перестановки в символах на меняют H_v , по H_v они делятся на 12 классов.

Лексикографически упорядоченные последовательности чисел вершин с различными валентностями для выпуклых 4- ... 9-акров и их т.г.с. взяты из [Voytekhevsky, Stepenshchikov, 2008]. **4-акрон.** 4: $\bar{4}3m$ (тетраэдр). **5-акры.** 23: $\bar{6}m2$ (3-гональная бипирамида), 41: $4mm$ (4-гональная пирамида). **6-акры.** 06: $m\bar{3}m$ (октаэдр), 222: $mm2$, 24: $mm2$, 321: m , 42: 2 , 501: $5m$ (5-гональная пирамида), 6: $\bar{6}m2$ (3-гональная призма). **7-акры.** 052: $\bar{10}m2$, 133: $3m$, 151: m , 2221: 2 , 2302: $mm2$, 232: 1 , $mm2$, 2401: $mm2$, 25: 2 , $mm2$, 3031: $3m$, 313: m , 3211: 1 , m , 331: 1 , m , 412: 1 , 2 , 4201: m , $mm2$, 43: 1 , 2 , m , $3m$, 511: 1 , m , 6001: $6mm$, 61: m , $mm2$.

8-акры. 044: $\bar{4}2m$, 0602: $6/mmm$, 062: $mm2$, 08: $\bar{8}2m$, 1331: m , 1412: m , 143: 1 , m , 1511: 1 , m , 161: 1 , m , 206: $\bar{3}m$, 2141: $mm2$, 2222: 2 , $mm2$, 22301: m , 224: 1 , 2 , m , $mm2$, 23111: 1 , 2321: 1 , m , 24002: $mm2$, 2402: 1 , $mm2$, 24101: 1 , 242: 1 , 2 , m , $2/m$, 2501: 1 , m , $mm2$, 26: 2 , m , $\bar{6}m2$, 3113: m , 31211: 1 , 3131: 1 , m , 3212: 1 , m , 32201: 1 , m , 323: 1 , m , 33011: 1 , 3311: 1 , 34001: m , 341: 1 , m , 4004: $\bar{4}3m$, 4022: 1 , $mm2$, 40301: m , 404: 1 , $mm2$, $\bar{4}2m$, 4121: 1 , m , 4202: 1 , 2 , 42101: 1 , m , 422: 1 , 2 , m , $mm2$, 4301: 1 , m , $3m$, 44: 1 , 2 , m , mmm , $\bar{4}2m$, 503: 1 , m , $3m$, 5111: 1 , 52001: m , 521: 1 , m , 602: 2 , m , 6101: 1 , 62: 1 , 2 , m , $mm2$, 70001: $7m$, 701: m , 8: $mm2$, $m\bar{3}m$.

9-акры. (опущены для краткости). Данные использованы для расчёта энтропии H_v (рис. 3). Очевидно,

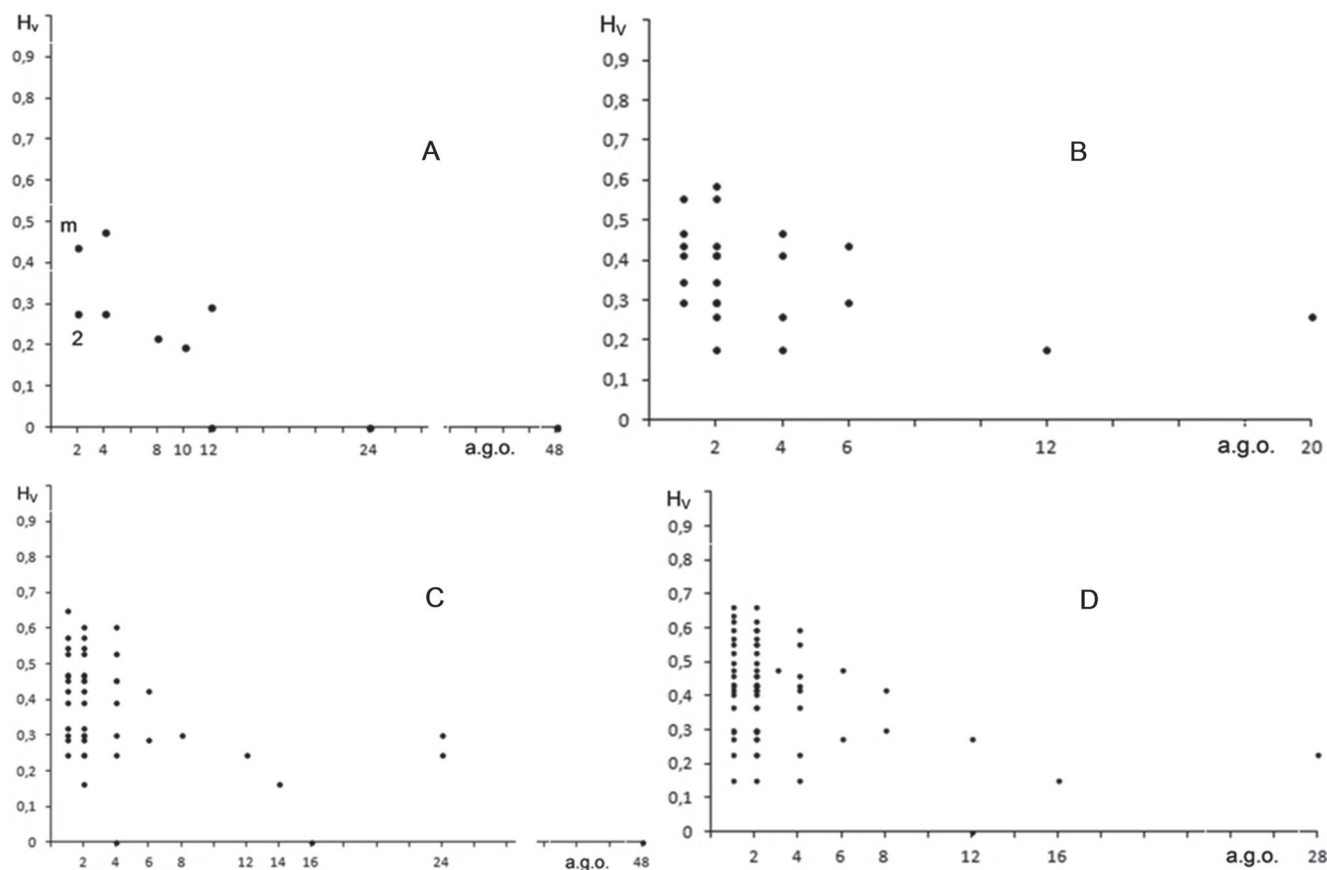


Рис. 3. Энтропия H_v для тех же классов выпуклых n -акров, что на Рис. 2

что она характеризует выпуклые 4- ... 9-акры детальнее, чем H_s . При этом $H_s \geq H_v$ для любого n и т.г.с.

Обсуждение

Соотношение между H_s и H_v сформулируем в виде теоремы 1, дополнительное свойство энтропии H_v – в виде теоремы 2.

Теорема 1. $H_s \geq H_v$ для любого выпуклого n -акра, т.е. для любого n и т.г.с.

Доказательство. Утверждение проверено для всех выпуклых 4- ... 9-акров (табл. 2). $H_s > H_v$ главным образом для n -акров с низкой симметрией, $H_s = H_v$ главным образом для n -акров с высокой симметрией, область перехода охватывает n -акры с п.г.а. от 2 до 12. Рассмотрим n -акр с вершинами различных симметричных позиций. Очевидно, их эквивалентные вершины имеют те же валентности. Вопрос в том, различны ли валентности у неэквивалентных вершин. $H_s = H_v$ если да, $H_s > H_v$ если нет. В послед-

нем случае уменьшение разнообразия валентностей приводит к уменьшению H_v по сравнению с H_s в соответствии с общими свойствами статистической энтропии H . Рассмотрим последовательности чисел вершин с различными валентностями для выпуклых 5- ... 9-акров (H_v даны в скобках), упорядоченные согласно алгоритму: ... $p \dots q \dots (H_1) \rightarrow \dots p-1 \dots q+1 \dots (H_2)$, где $1 \leq p \leq q$.

5-акры. 23 (0,292) \rightarrow 14 (0,217). **6-акры.** (Здесь и далее 0 и перестановки индексов опущены, т.к. они не меняют H_v .) 222 (0,477) \rightarrow 123 (0,439) \rightarrow 24 (0,276) \rightarrow 15 (0,196) \rightarrow 6 (0). **7-акры.** Главный тренд: 1222 (0,587) \rightarrow 1123 (0,555) \rightarrow 223 (0,469) \rightarrow 133 (0,436) \rightarrow 124 (0,415) \rightarrow 34 (0,297) \rightarrow 25 (0,260) \rightarrow 16 (0,178); ветвь: 124 (0,415) \rightarrow 115 (0,346). **8-акры.** Главный тренд: 11123 (0,649) \rightarrow 1223 (0,574) \rightarrow 1133 (0,545) \rightarrow 233 (0,470) \rightarrow 224 (0,452) \rightarrow 134 (0,423) \rightarrow 44 (0,301) \rightarrow 35 (0,287) \rightarrow 26 (0,244) \rightarrow 17 (0,164) \rightarrow 8 (0); ветви: 2222 (0,602) \rightarrow 1223 (0,574); 1133 (0,545) \rightarrow 1124 (0,527) \rightarrow 1115 (0,466); 134 (0,423) \rightarrow 125 (0,391) \rightarrow 116 (0,319). **9-акры.** Главный тренд: 11223 (0,661) \rightarrow 2223 (0,595) \rightarrow 1233 (0,569) \rightarrow 333 (0,477) \rightarrow 234 (0,461) \rightarrow 144 (0,419) \rightarrow 135 (0,407) \rightarrow 45 (0,298) \rightarrow 36 (0,276) \rightarrow 27 (0,230) \rightarrow 18 (0,152) \rightarrow 9 (0); ветви: 11223 (0,661) \rightarrow 11133 (0,636) \rightarrow 11124 (0,620); 1233 (0,569) \rightarrow 1224 (0,553) \rightarrow 1134 (0,528) \rightarrow 1125 (0,499) \rightarrow 1116 (0,435);

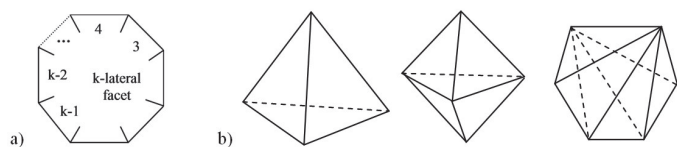


Рис. 4. Диаграмма Шлегеля на k -угольной грани (а) и предельные выпуклые 4-, 5- и 6-акры (б)

Таблица 2. Соотношения H_s и H_v для выпуклых 4- ... 9-акров

п.г.а.	т.г.с.	V	4	5	6			7					8								9								
		F	4	5	6	5	6	7	8	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10	11	12	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1									>	>	>			>	>	>	>	>	>	>	>	>	>	>	>	>	>	>
2	2						>			>	>		=		>	>	>	>	>	=		>	>	>	>	>	>	>	>
	m							>		>	>	>	>			>	>	>	>	>	>	>	>	>	>	>	>	>	>
3	3																									=			
4	mm2							>	=	>		≥	≥	>	>			=	>	>	≥	>	>		>	≥	≥	≥	≥
	2/m																	=											
6	3m									>			=				>						≥			=			=
8	4mm			=																				>				≥	
	mmm																=												
	$\bar{4}2m$																=		=		=								
10	5m						=																						
12	$\bar{6}m2$				=	=											=					=			>				=
	$\bar{3}m$																			=									
	6mm										=																		
14	7m															=													
16	$\bar{8}2m$																		=										
	8mm																								=				
20	$\bar{10}m2$												=																
24	6/mmm																			=									
	$\bar{4}3m$	=																			=								
28	$\bar{14}m2$																												=
48	$m\bar{3}m$							=						=															

Примечание к табл. 2: > означает $H_s > H_v$ для всех n-акров класса; = означает $H_s = H_v$ для всех n-акров класса; ≥ означает, что в классе есть оба типа n-акров.

234 (0,461) → 225 (0,432); 135 (0,407) → 126 (0,369) → 117 (0,297).

Последовательности могут быть упорядочены различным образом. Выше использовано правило «медленного спуска», позволяющее включить в главный тренд наибольшее число последовательностей. Без исключений, предложенный алгоритм упорядочения даёт $H_1 > H_2$. Для доказательства неравенства в общем виде (для любого $1 \leq p \leq q$ и n) нужно сравнить по два слагаемых в разложениях H_1 и H_2 , т.е. доказать:

$$-(p/n) \ln(p/n) - (q/n) \ln(q/n) > -[(p-1)/n] \ln[(p-1)/n] - [(q+1)/n] \ln[(q+1)/n].$$

Если $p \rightarrow 1$, то $[(p-1)/n] \ln[(p-1)/n] \rightarrow 0$ и для $p = 1$ получим очевидное неравенство $(q+1) (1+1/q)^q > 1$. Для $2 \leq p \leq q$ следует доказать:

$$p^p / (p-1)^{p-1} < (q+1)^{q+1} / q^q = f(q).$$

Рассмотрим $f(q)$ как непрерывную функцию, найдём логарифмическую производную:

$$df/dq = \ln(1+1/q) \times (q+1)^{q+1} / q^q > 0.$$

Итак, $f(q)$ растёт с аргументом $q = p, p+1, p+2$, etc. Покажем, что неравенство верно даже для минимального аргумента $q = p$, т.е.:

$$p^p / (p-1)^{p-1} < (p+1)^{p+1} / p^p \quad \text{или} \quad 1 < (p+1)^{p+1} (p-1)^{p-1} / p^{2p} = f(p).$$

Рассмотрим $f(p)$ как непрерывную функцию, найдём логарифмическую производную:

$$df/dp = \ln(1-1/p^2) \times (p+1)^{p+1} (p-1)^{p-1} / p^{2p} < 0.$$

Итак, $f(p)$ уменьшается с ростом аргумента $p = 2, 3, 4$, etc. Действительно, $f(2) = 1,6875$, $f(3) = 1,404...$, $f(4) = 1,287...$, $f(5) = 1,223...$, $f(6) = 1,182...$. Но если $p \rightarrow \infty$, то

$$\lim f(p) = \lim (p+1)^{p+1} (p-1)^{p-1} / p^{2p} = \lim (1+1/p)^p (1-1/p)^p [1+2/(p-1)] = e \times e^{-1} \times 1 = 1.$$

Итак, $f(p) \rightarrow 1$ сверху, т.е. $f(p) > 1$ для любого p . Таким образом, $H_1 > H_2$ для любого $1 \leq p \leq q$ и n .

Теорема 2. Энтропия H_V никогда не достигает теоретического максимума $\lg n$.

Доказательство. По сути, следует показать, что нет n -акров, у которых все вершины имели бы разные валентности. На самом деле верно более сильное утверждение: у любого выпуклого n -акра есть по меньшей мере 4, или 3 и 2, или 3 пары вершин с одинаковыми валентностями.

Допустим, что есть выпуклый полиэдр с разноименными гранями. Рассмотрим его диаграмму Шлегеля на грань с наибольшим числом рёбер (k -угольная грань, рис. 4 а). Рассмотрим её корону – совокупность граней, касающихся её по рёбрам. Попробуем построить её, не допуская повторов. После того, как присоединены $(k-1)$ -, $(k-2)$ - ... 4- и 3-угольные грани, свободными останутся 3 ребра. Из этого следует, что исходное допущение ошибочно. Очевидно, к базальной грани будут присоединены 3 одноименных, 2 и 1 или 3 разноименные грани. Поскольку все возможные (3- ... k -угольные) грани использованы, то на полиэдре окажутся 4, или 3 и 2, или 3 пары одноименных граней.

Допустим, что не все $k-3$ типа граней представлены в короне. После того, как по одной грани каждого типа присоединены к базальной грани, свободными останутся более чем 3 ребра. Для заполнения короны придётся выбрать более чем 3 грани из меньшего, чем ранее ($k-3$), числа вариантов. Эти причины не могут уменьшить разнообразие граней в короне. Наконец, в силу дуальности, любой выпуклый n -акр имеет 4, или 3 и 2, или 3 пары вершин с одинаковыми валентностями. В общем виде оценка не может быть улучшена. Предельные случаи: тетраэдр, 3-гональная дипиримида, 6-акр с т.г.с. mm2 (рис. 4 б).

Заключение

Из рассмотрения следует, что энтропия H_S не связана жёстко с п.г.а. и т.г.с. выпуклого n -акра. H_S фиксирует его на шкале между $H_{S,\min} = 0$ и $H_{S,\max} = \lg n$. Равные изменения вероятностей p_i в углах и центральной части диаграммы приводят к весьма различным изменениям H_S . $H_{S,\max} = \lg n$ достигается для комбинаторно асимметричных выпуклых n -акров ($n \geq 7$). $H_{\min} = 0$ достигается для правильных и полуправильных n -акров (все случаи перечислены), бесконечных серий призм и антипризм (чётные $n \geq 4$).

Между двух пределов H_S выпуклых 4- ... 9-акров показывает тренд: чем больше п.г.а., тем меньше H_S . Но есть ряд исключений. В целом, для данного n по величине $0 < H_S < \lg n$ нельзя определить п.г.а. (тем более т.г.с.) n -акра.

Энтропия H_S фиксирует более беспорядок, чем сложность топологии n -акра. Первый неплохо характеризуется через т.г.с. Но как различить n -акры с той же т.г.с. и разным числом рёбер, например, в преобладающем разнообразии комбинаторно асимметричных n -акров для любого $n \geq 7$. Для этого предложена энтропия H_V , учитывающая валентности вершин. Она классифицирует выпуклые 4- ... 9-акры более детально. H_V достигает $H_{V,\min} = 0$ для правильных и полуправильных n -акров, бесконечных серий призм и антипризм, но никогда не достигает $H_{V,\max} = \lg n$. Для всякого выпуклого n -акра $H_S \geq H_V$. При этом $H_S = H_V$ если вершины, неэквивалентные по группе автоморфизмов, имеют различные валентности, $H_S > H_V$ в противном случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Войтеховский Ю.Л., Степенщиков Д.Г. Комбинаторная кристалломорфология. Кн. 4. Выпуклые полиэдры. Т. 1. 4- ... 12-эдры. Апатиты: Изд-во КНИЦ РАН, 2008. 833 с.
2. Grünbaum B. Convex polytopes. New York: Springer, 1967. 456 p.
3. Halphen E. L'analyse intrinsèque des distributions de probabilité // Publ. Inst. Stat. Univ. Paris. 1957. V. 6. N 2. P. 77-159.
4. Shannon C.E. The mathematical theory of communication // Bell Syst. Tech. J. 1948. V. 27. P. 379-423, 623-656.
5. Voytekhevsky Y.L. E.S. Fedorov's algorithm of the generation of the combinatorial diversity of convex polyhedra: the latest results and applications // J. Struct. Chemistry. 2014. V. 55. N 7. P. 1293-1307.
6. Voytekhevsky Y.L. How to name and order convex polyhedra // Acta Cryst. 2016. A72. P. 582-585.
7. Voytekhevsky Y.L. Convex polyhedra with minimum and maximum names // Acta Cryst. 2017 a. A73. P. 271-273.
8. Voytekhevsky Y.L. Accelerated scattering of convex polyhedra // Acta Cryst. 2017 b. A73. P. 423-425.